Principal eigenvalues for Fully non linear equations in punctured balls

November 15, 2022

Abstract

We are intereted in the existence of the principal eigenvalue in a punctured ball, in presence of a singular potential. More precisely we discuss existence and regularity of solutions $(\bar{\lambda}_\gamma, u_\gamma)$ of the equation

$$F(D^2 u_\gamma) + \bar{\lambda}_\gamma \frac{u_\gamma}{r^\gamma} = 0 \text{ in } B(0,1) \setminus \{0\},\ u_\gamma = 0 \text{ on } \partial B(0,1)$$

where $u_\gamma > 0$, and $\gamma > 0$. F is Fully Non Linear Elleiptic. We will prove existence of radial solutions which are continuous on $\overline{B(0,1)}$ in the case $\gamma < 2$, the existence of non bounded solutions in the case $\gamma = 2$ and non existence's result for $\gamma > 2$. We also give the explicit value of $\bar{\lambda}_2$ in the case of the Pucci's operators, this generalizes the explicit value of the Hardy's Sobolev constant for the Laplacian.

Nous considŕons le problème des valeurs propres et fonctions propres radiales dans une boule épointée, $B(0,1) \setminus \{0\}$, plus precisement l'equations

$$\mathcal{M}^+(D^2 u_\gamma) + \bar{\lambda}_\gamma \frac{u_\gamma}{r^\gamma} = 0 \text{ in } B(0,1) \setminus \{0\},\ u_\gamma = 0 \text{ on } \partial B(0,1)$$

$u > 0$, $\bar{\lambda} > 0$ et $\gamma \leq 2$. $\mathcal{M}^+$ est l'opérateur de Pucci. On montre dans le cas $\gamma < 2$ l'existence de solutions pour les equations de la forme

$$\mathcal{M}^+(D^2 u) + f r^{-\gamma} = 0$$

qui sont continues, jusqu'en 0, même sont Lipschitz pour $\gamma \leq 1$, Holderiennes pour $\gamma > 1$. On montre un principe de maximum en dessous de la valeur propre qui est definie sur le modele de Beresticki Nirenberg Varadhan . On montre aussi l'existence d'une fonction propre.
Lorsque $\gamma = 2$ on montre que pour $\mathcal{M}^+$ la valeur explicite de la premiere valeur propre est

$$\bar{\lambda}_2 = \Lambda \left(\frac{\lambda(N-1)}{\lambda} - 1 \right)^2$$

De nombreuses directions peuvent être considérées par exemple on s'interesse à l'existence de solutions pour un problème sous lineaire

$$(D^2 u) + \mu u r^{-2} = a(x) u^\theta$$

avec $\theta < 1$ et a une fonction continue. On s'interessera aussi aux equations avec un second membre surlinéaire.