# 1 Collaboration passée Huillet/Martinez et projet de recherches futur:

***************************************************************************

## 1.1 Brève histoire de la collaboration passée de S. Martínez et T. Huillet:

Notre collaboration a porté sur une réflexion commune sur des modèles aléatoires discrets inspirés des partitions aléatoires liées à des modèles de génétique de populations. Nous avons quatre travaux récents en collaboration autour de ces thèmes, les deux derniers ayant été éffectués lors de la dernière invitation du Professeur Servet Martínez à Cergy (2012-2013) et lors de mes propres visites au CMM de Santiago du Chili sur la même période:

**1.** Discrete evolutionary genetics: multiplicative fitnesses and the mutation-fitness balance. Appl. Math. (Irvine) 2 (2011), no. 1, 11-22.
**2.** Duality and intertwining for discrete Markov kernels: relations and examples. Adv. in Appl. Probab. 43 (2011), no. 2, 437-460.
**3**. Occupancy distributions arising in sampling from Gibbs-Poisson abundance models. J. Stat. Phys., Volume 153, Issue 5 (2013), Page 763-800. (hal-00797149). doi: 10.1007/s10955-013-0865-y
**4.** On Moebius duality and coarse-graining. Journal of Theoretical Probability, doi: 10.1007/s10959-014-0569-5, online first July 2014.

- Dans le travail 4, on étudie les notions de dualité généralisée de Moebius sur des ensembles partiellement ordonnés (multisets et partitions) avec application aux modèles de Cannings multi-allèles de la génétique.

- Dans le travail 3, nous avons abordé des problèmes de 'sampling' construits à partir d' une famille à un paramètre ($\theta > 0$) de distributions de type Gibbs-Poisson: on étudie donc une famille de modèles d'allocation aléatoire de $k$ particules dans $n$ boîtes selon un tel modèle discret d'abondance d'espèces. $n$ peut être le nombre (inconnu) d'espèces d'une population et $k$ le nombre de mesures effectuées (le nombre d'échantillons). Sur ces $k$ mesures, seules un nombre aléatoire $P(n, k)$ ont menées à la découverte d'espèces nouvelles. Sur la base de $k$ et de $P(n, k)$ un problème essentiel est d'estimer conjointement le paramètre $\theta$ du modèle d'abondance et le nombre $n$ d'espèces sous-jacent. Il existe alors une famille non-triviale de modèles où le nombre d'espèces est a priori infini et où le paramètre de température $\theta$ tend vers 0 de sorte $n\theta \to \gamma > 0$ (dont la formule d'Ewens est un cas particulier). Il convient d'estimer le nouveau paramètre $\gamma$, sur la base du nombre $P(k)$ d'espéces distinctes visitées par un $k-$échantillon.

- Dans le travail 2 on étudie la relation de dualité entre chaînes de Markov, on étend vers d'autres cas 'ultramétriques' des résultats de dualité prouvés préalablement pour des noyaux type naissance et mort, et on donne la condition pour avoir l'existence d'un dual 'sharp'.

- Dans le travail 1 on étudie l' approche de l' équilibre dans le cadre des modèles évolutionnaires en génétique des population, utilisant des relations de domination stochastique pour des modèles de selection-mutation.

## 1.2 Projet de recherches futur:

Nous sommes intéressés à la réflexion jointe de modèles mathématiques de la biodiversité. Sujets dans lequel chacun de nous a fait déjà des contributions dans le passé immédiat. Les objets précis de la collaboration future à développer dans le cadre du poste de professeur invité de S. Martínez á l'Université de Cergy-Pontoise sont les suivants:

### 1.2.1 Dualité et chaines de Markov:

Nous souhaitons continuer l' étude de la dualité de Moebius, surtout pour les partitions.

### 1.2.2 Evolutionary game dynamics: deterministic versus stochastic

Dans T. Huillet, *On discrete-time multiallelic evolutionary dynamics driven by selection. Journal of Probability and Statistics, Volume 2010, Article ID 580762, 27 pages, 2010,* le role essentiel des matrices de fitness $W$ strictement ultramétrique (sUm) et anti-strictement ultramétrique (antisUm) $\widetilde{W}$ a été soulevé quant à l'existence ou pas d'un état d'équilibre **polymorphique** instable ou stable. Ce travail montre l' importance de l' **ultramétricité** dans ce contexte (thème dont le Prof. S. Martínez est l' un des experts mondiaux).
•Modèles de fitness (sélection).

Ces matrices de fitness apparaissent dans le contexte suivant: Soit $x_k$ la fréquence de l' espèce $k$ dans une population à $K > 2$ espèces et $\mathbf{x} := (x_1, .., x_K)'$ le vecteur colonne des fréquences. La dynamique de fitness implique une interaction **multiplicative** entre $x_k$ et $(W\mathbf{x})_k$, l'entrée $k$ de l' image $W\mathbf{x}$ de $\mathbf{x}$ par $W$ où $W$ est une matrice de fitness (symmétrique). Avec $D_{\mathbf{x}}$ =diag($\mathbf{x}$), c' est

$$\mathbf{x}_+ = \frac{1}{\omega(\mathbf{x})} D_{\mathbf{x}} W \mathbf{x} = \frac{1}{\omega(\mathbf{x})} D_{W\mathbf{x}} \mathbf{x} =: \mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

où $\mathbf{p}$: $S_K \to S_K$ et $S_K := \left\{ x_k \geq 0 : \sum_{k=1}^{K} x_k = 1 \right\}$, le simplexe de dimension $(K-1)$ et $\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' W \mathbf{x}$ est la fitness moyenne.

**Projet**: En utilisant une formule d' inversion, on aimerait caractériser (donner une représentation de) la classe des matrices sUm et antisUm, ainsi qu'une facon de calculer explicitement leur potentiel d'équilibre $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$ pour lequel $W\mathbf{z} = \mathbf{1}$ and $\widetilde{W}\mathbf{z} = \mathbf{1}$.

•Matrices de fitness 'plates'.

Soit $\sigma > 0$. On considére la dynamique évolutionnaire de la forme (1) mais maintenant quand $W$ est de la forme $W = J + \sigma A \succeq \mathbf{0}$ où $A$ est une matrice antisymmétrique ($A' = -A$) et $|A_{k,l}| \leq 1/\sigma$ et $J = \mathbf{1}\mathbf{1}'$. La fonction de fitness moyenne $\omega(\mathbf{x})$ apparaissant dans (1) est maintenant $\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' W \mathbf{x} = 1$, donc constante. En ce sens, la matrice de fitness $W$ est appelée plate. Puisque $W_{k,l} + W_{l,k} = 2$, ces modèles correspondent à des jeux à somme constante dans lesquels chaque paire de joueurs a des intérêts opposés ou à un modèle d' évolution sous l' effet de ségrégation en génétique des populations. Etant donnés ces conflits d'intérêt, l' équilibre de tels jeux consistent en des stratégies mixtes. La dynamique (1) pour de tels $W$ est

$$\mathbf{x}_+ = \frac{1}{\omega(\mathbf{x})} D_{\mathbf{x}} W \mathbf{x} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\sigma} D_{\mathbf{x}} A \mathbf{x} =: \mathbf{p}(\mathbf{x}). \tag{2}$$

A nouveau $\mathbf{p}$, maintenant comme un opérateur stochastique quadratique, envoie $S_K$ dans $S_K$.

**Questions:**

$(a)$ Une question-clé est de déterminer (caractériser) les $A$ pour lesquelles $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ pour un $\mathbf{z} \succ \mathbf{0}$ car alors $W\mathbf{z} = \mathbf{1}$ et la nouvelle matrice $W$ a à nouveau un potentiel d' équilibre $\mathbf{z}$ et $\mathbf{x}_{eq} := \mathbf{z}/\left|\mathbf{z}\right|$ sera un état d'équilibre polymorphique de la dynamique (2) gouvernée par la matrice de fitness plate $W$? Quand une matrice de fitness plate $W = J + \sigma A$ a un état d'équilibre polymorphique $\mathbf{x}_{eq}$ dans $S_K$, il est instable et la dynamique (2), initiée en $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_{eq}$ dans $S_K$ spirale en s'éloignant de $\mathbf{x}_{eq}$ vers la frontiére $\partial S_K$ sans l'atteindre en temps fini (**'tourbillon évolutionnaire'**). Selon la structure de signe de $A$, quel est l'ensemble $\varpi-$limite de $\mathbf{x}_0$, $\varpi\left(\mathbf{x}_0\right) \subseteq \partial S_K$? Ce problème a à voir avec les **matrices de tournoi**.

$(b)$ Peut-on construire de telles matrices $A$ à partir de matrices sUm généralisées (asymmétriques)?

$(c)$ Soit $\mathbf{p}\left(\mathbf{x}\right) := \left(p_1\left(\mathbf{x}\right), ..., p_K\left(\mathbf{x}\right)\right)'$ donnés par (1) ou par (2). Soit $i = \left(i_1, ..., i_K\right)'$ and $j = \left(j_1, ..., j_K\right)'$ où $i_k, j_k \geq 0$ sont des entiers vérifiant $i_1 + ... + i_K = N$ et $j_1 + ... + j_K = N$. Considerons la chaine de **Markov (multiallèle** et non-neutre de **Wright-Fisher)** de matrice de transition

$$P_{i,j} = \binom{N}{j_1, .., j_K} \prod_{k=1}^{K} p_k\left(i/N\right)^{j_k}.$$

Quels sont les comportements à temps long (transience/récurrence) de cette chaine pour les différentes situations rencontrées pour les mécanismes de bias $\mathbf{p}\left(\mathbf{x}\right)$?

Servet A. Martínez
Depto. Ingeniería Matemática and Centro Modelamiento Matemático
UMI 2071 UCHILE-CNRS,
Casilla 170-3 Correo 3, Santiago, CHILE.
e-mail: smartine@dim.uchile.cl
et
Thierry E. Huillet
Laboratoire de Physique Theorique et Modelisation
Universite de Cergy-Pontoise, CNRS UMR-8089
Site de Saint Martin, 2 avenue Adolphe-Chauvin
95302 CERGY-PONTOISE, FRANCE.
Tel (lab): (+33) (0)1 34 25 75 14
Fax: (+33) 1 34 25 75 00
E-mail: Thierry.Huillet@u-cergy.fr