UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Laboratoire de mathématiques Analyse Géométrie Modélisation

Retour à l'équilibre dans des systèmes hamiltoniens couplés

Projet de recherche pour la visite de Vojkan JAKŠIĆ en tant que professeur invité

Considérons un système hamiltonien de dimension finie (le petit système) couplé à un système de dimension infinie (le grand système) qui se trouve dans un état stationnaire (au sens probabiliste). Pour fixer les notations, supposons que le grand système est confondu avec l'équation des ondes. On étudie donc l'espace de phase $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{2d} \oplus (H^1 \times L^2)$ (où les espaces de Lebesgue et de Sobolev sont considérés sur $\mathbb{R}^d$) et le hamiltonien

$$H(p,q,\varphi,\pi) = \frac{|p|^2}{2} + V(q) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \big(|\nabla\varphi|^2 + |\pi|^2\big)\mathrm{d}x + q \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\nabla\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

où les variables $(p,q) \in \mathbb{R}^{2d}$ et $(\varphi,\pi) \in H^1 \times L^2$ correspondent respectivement aux petit et grand systèmes, and $\rho(x)$ désigne la densité de charge. Le dernier terme de l'hamiltonien (1) décrit l'interaction entre les deux systèmes dans l'approximation bipolaire. Sous certaines hypothèses sur la fonction ρ exprimées en termes de la représentation de sa transformée de Fourier comme produit de Blaschke, on peut introduire de nouvelles variables indépendantes r_k et réduire (au moins, formellement) le système hamiltonien défini par (1) à un système stochastique de dimension infinie de la forme

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\nabla_g G(p,q,r), \quad \dot{r}_k = -\gamma_k \nabla_{r_k} G(p,q,r) + \lambda_k \dot{w}_k, \tag{2}$$

où $r = (r_k, k \geq 1)$, G est un hamiltonien, $\gamma_k > 0$ et λ_k sont des constantes réelles et w_k désignent des mouvements browniens standards indépendants. Nous envisageons de justifier la réduction mentionnée ci-dessous et de montrer l'existence globale et l'unicité de solutions du problème de Cauchy pour le système (2). Une fois ces résultats seront établis, nous allons étudier les propriétés de mélange du flot stochastique défini par (2). Signalons que ce problème est bien compris dans certains cas particuliers; voir [JP98, EPRB99].

Références

[EPRB99] J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet, and L. Rey-Bellet, *Non-equilibrium statistical mechanics of anharmonic chains coupled to two heat baths at different temperatures*, Comm. Math. Phys. **201** (1999), no. 3, 657–697.

[JP98] V. Jakšić and C.-A. Pillet, *Ergodic properties of classical dissipative systems. I*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 245–282.