UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Laboratoire de
mathématiques
Analyse Géométrie Modélisation

Mécanique statistique hors équilibre pour des EDP hamiltoniennes avec dissipation et force aléatoire

Projet de recherche pour la visite de Vojkan JAKŠIĆ en tant que professeur invité

Pendant les vingt dernières années, la mécanique statistique hors équilibre a connu un progrès remarquable. Diverses méthodes ont été développées pour l'étude de systèmes qui sont maintenus hors équilibre par des forces extérieures et sont caractérisés par un flux constant d'énergie. L'un des résultats les plus remarquables est la symétrie universelle des fluctuations du taux de la production d'entropie. Ce résultat, obtenu par Gallavotti–Cohen [GC95], a été développé par plusieurs auteurs; voir [LS99, Mae99].

Le but de ce projet est d'étudier la production d'entropie et la symétrie de Gallavotti–Cohen dans le cas des EDP stochastiques qui proviennent de la physique mathématique. Plus précisément, on considère un système hamiltonien, avec une dissipation et force aléatoire, dans un espace de dimension infinie H. Sous des hypothèses assez générales, on peut montrer que le processus markovien associé à ce système stochastique possède une unique mesure stationnaire μ. De plus, la loi forte des grands nombres a lieu au sense que pour toute fonction continue bornée $f : H \to \mathbb{R}$, on a presque sûrement la convergence

$$\langle f \rangle_t := \frac{1}{t} \int_0^t f(v_s)\, ds \to \int_H f(v)\mu(dv) \quad \text{quand } t \to \infty, \tag{1}$$

où u_t désigne une trajectoire stationnaire du système en question. Supposons maintenant qu'il existe une fonctionnelle de *production d'entropie* $\sigma : H \to \mathbb{R}$ pour laquelle (1) a lieu. La symétrie de Gallavotti–Cohen décrit les fluctuations de la moyenne temporelle $\langle \sigma \rangle_t$ autour de la moyenne spatiale $(\sigma, \mu) = \int_H \sigma d\mu$. Grosso modo, il s'agit de la relation

$$\frac{\mathbb{P}\{\langle \sigma \rangle_t = (\sigma, \mu) + r\}}{\mathbb{P}\{\langle \sigma \rangle_t = (\sigma, \mu) - r\}} \sim e^{-r} \quad \text{quand } t \to \infty. \tag{2}$$

On envisage à étudier, dans un premier temps, la validité de cette égalité pour un système modèle et la généraliser ensuite ensuite aux EDP stochastiques plus réalistes, telle que le système de Navier–Stokes et l'équation de Ginzburg–Landau.

References

[GC95] G. Gallavotti and E. G. D. Cohen, *Dynamical ensembles in stationary states*, J. Statist. Phys. **80** (1995), no. 5-6, 931–970.

[LS99] J. L. Lebowitz and H. Spohn, *A Gallavotti-Cohen-type symmetry in the large deviation functional for stochastic dynamics*, J. Statist. Phys. **95** (1999), no. 1-2, 333–365.

[Mae99] C. Maes, *The fluctuation theorem as a Gibbs property.*, J. Statist. Phys. **95** (1999), no. 1-2, 367–392.