Existence et régularité pour les solutions d'équations complètement non linéaires anisotropiques dégénérées

F. Demengel, I. Birindelli

Suite à des travaux récents nous nous interessons à une généralisation d u pseudo $\vec{p}$ Laplacien

$$\sum_i (|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u)$$

que l'on définit de la façon suivante

$$F(p, X) = \mathcal{M}^{\pm}(\Theta_{\vec{\alpha}}(p) X \Theta_{\vec{\alpha}}(p))$$

où $\mathcal{M}^{\pm}$ sont les opérateurs de Pucci et $\Theta_{\vec{\alpha}}(p)_{ij} = |p_i|^{\frac{\alpha_i}{2}} \delta_i^j$ et les α_i sont des nombres ≥ 0. On considère les solutions de viscosité de

$$F(\nabla u, D^2 u) = f$$

avec $f \in \mathcal{C}$. On montre des résultats de régularité entre des sur et des sous solutions à savoir

Si u est semi continue superieurement et $F(\nabla u, D^2 u) \geq f$ et v sci et $F(\nabla v, D^2 v) \leq g$ dans la boule B_1 et si $\overline{\alpha} := \sup \alpha_i \leq \underline{\alpha} + 1 := \inf \alpha_i + 1$ alors pour tout $r < 1$ il existe c_r tel que pour tous $(x, y) \in B_r^2$

$$u(x) \leq v(y) + \sup(u - v) + c_r |x - y|$$

On en déduira par la méthode de Perron l'existence de solutions au problème de Dirichlet, sous réserve de la construction d'une sur-solution qui vaut 0 sur le bord de l'ouvert considéré. La condition $\overline{\alpha} := \sup \alpha_i \leq \underline{\alpha} + 1 := \inf \alpha_i + 1$ n'est pas étonnante et rejoint les résultats de régularité des solutions pour le pseudo$\vec{p}$ Laplacien.